# Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Накапливая данные, мы получили совокупность, состоящую из исходов, пусть – число исходов -го типа. Отсюда . Допустим далее, что – значение исхода -го типа. Тогда среднее значение принимает вид:

В данном случае среднее является некоторой величиной, полученной наблюдением. Теперь нам необходимо предсказать среднее значение. Прогнозированное среднее значение случайной величины называется математическим ожиданием. Если случайная величина может принимать значения с вероятностями , то средним значением величины , то есть математическим ожиданием (обозначают МОЖ, МО или М), будет:

Математическое ожидание является абстрактным понятием. Однако, когда велико, среднее значение и по существу оказываются численно равными.

Пример. В цехе на 4 станках изготавливают одинаковые детали. За месяц на первом станке изготовлено 100 деталей, из них вероятность первого сорта 0,9, на втором – 150 деталей с вероятностью первого сорта 0,8, на третьем – 100 деталей с вероятностью первого сорта 0,95, и на четвертом – 120 деталей с вероятностью первого сорта 0,75. Найти общего числа деталей первого сорта, изготовленных на четырех станках.

Решение. Изготовление деталей первого сорта есть величина случайная. Искомое

деталей.

Пример. Независимые случайные величины заданы:

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 10 | 3 | 6 | 2 |  |  | 15 | 10 | 20 |
|  | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,4 |  |  | 0,2 | 0,7 | 0,1 |

Найти случайной величины .

Решение.

Так как случайные величины независимы, то искомое

Однако среднее значение не всегда может характеризовать действительную картину учитываемых величин.

Например, имеем две группы величин:

Как характеризовать данный разброс величин?

Величина, называемая дисперсией, используется как характеристика разброса или ожидаемого разброса. Дисперсия совокупности имеет вид:

Прогнозируемая дисперсия:

Рассмотрим приведенные выше группы:

Исходов для групп:

Таблица 2



Чтобы понять смысл дисперсии, заметим, что для I группы, значения данных которой мало отличаются друг от друга, дисперсия равна 0,0028, в то же время для II группы, характеризуемой значительным разбросом, дисперсия равна 0,06. Среднее квадратическое отклонение, которое является просто квадратным корнем из дисперсии, употребляется чаще, чем дисперсия и имеет ту же размерность, что и среднее значение. В нашем примере, среднее квадратическое отклонение для I группы данных – 0,053. Это показывает, что большая часть данных лежит в интервале 0,5 ± 0,053, тогда как для второй группы среднее квадратическое отклонение равно 0,5 ± 0,245. Часто необходимо использовать оценку числа исходов или оценку вероятностей для вычисления средних значений и средних квадратческих отклонений, но не менее важно уметь решать обратную задачу. Если известны средние значения и средние квадратические отклонения =, то какова вероятность появления каждого -го события?

Пример. Завод выпускает станки 4 типов стоимостью 7, 9, 11 и 15 тысяч рублей. Количество станков неизвестно, но известно, что средняя стоимость станка составляет 9 тысяч рублей. Какова оценка распределения станков по типам является лучшей (Потребность в каждом станке будем считать одинаковой)? Обратная задача такого типа имеет бесконечное множество решений, удовлетворяющих среднему значению. Какое же решение является оптимальным? Чтобы ответить на этот вопрос и решить пример, нужно напомнить одно из положений теории информации.

Неопределенность результата события возрастает с увеличением числа равновероятных исходов. Следовательно, должно возрастать количество информации в сообщении о результате. Величина, определяющая количественную меру неопределенности исхода события, называется энтропией события .

*,*

где – вероятность, – исход события, – число всех возможных исходов.

Если новый станок с ЧПУ дает не более 5% брака, то следовательно, вероятность изготовления годных деталей на нем , а бракованных . Энтропия этого станка

Для изношенного станка появление годных и бракованных деталей становиться одинаково вероятным, неопределенность достигает наибольшего значения и энтропия достигает максимального значения для события с двумя исходами:

С помощью этой формулы можно подсчитать количество информации. Единица информации содержит в себе какое-либо законченной сообщение. Эту единицу информации называют бит – бинарная или двойная единица. Используя формулу () для нашего конкретного примера, наименее смещенную оценку, максимизируя функцию , при заданных ограничениях. В данном случае ограничениями являются и . Функция – средняя неопределенность информации о системе. Чтобы максимизировать функцию , обычно используют множители Лагранжа. Для нахождения ее оптимального значения продифференцируем функцию и результат приравняем нулю. Затем продифференцируем уравнения для ограничивающих условий и умножим каждое из них а множитель Лагранжа (множители Лагранжа λ и β пока еще неизвестны, при чем они различны для различных уравнений).

Суммируя эти выражения, и замечая, что , получим

,

где

Множители Лагранжа λ и β найдем путём использования двух исходых уравнений для ограничений.

Следовательно,

Для нашего примера имеем:

Где , а значения взяты в тысячах. После преобразований

Корень не имеет смысла, то , решая квадратное уравнение получим, что .

Определим вероятности:

Таким образом, наилучшей оценкой, которую можно сделать на основании имеющейся информации, является следующая: 44% станков стоят по 7 тысяч рублей, 29% - по 9, 19% - по 11 и 8% - по 15.